

MASALAH NILAI EIGEN ATAS ALJABAR MAX-PLUS PADA SISTEM PRODUKSI BULU MATA

Nadya Novika¹, Suroto^{2*}, Bambang Hendriya Guswanto³

^{1,2,3}Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, Indonesia

nadyanovuka19@gmail.com¹, suroto@unsoed.ac.id^{2*},

bambang.guswanto@unsoed.ac.id³

* Corresponding author

Abstrak

Sistem kejadian diskrit merupakan suatu sistem yang perilakunya ditentukan oleh kejadian dan kejadiannya berubah pada waktu diskrit. Sistem produksi bulu mata pada PT Bio Takara Purwokerto merupakan suatu masalah sistem kejadian diskrit dan bisa dimodelkan dalam permasalahan linier max-plus. Dengan menggunakan algoritma power, ditentukan nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar max-plus yang akan digunakan untuk periodisasi waktu produksi. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa waktu periodik untuk sistem produksi bulu mata pada PT Bio Takara Purwokerto adalah 78,488 menit. Berdasarkan waktu periodik ini, selanjutnya dapat diperoleh waktu setiap unit pemrosesan mulai bekerja memproduksi bulu mata.

Kata kunci: Eigen, max-plus, periodik, sistem kejadian diskrit

Abstract

A discrete event system is a system whose behavior is determined by events and their events change at discrete times. The eyelash production system at PT Bio Takara Purwokerto is a discrete event system problem and can be expressed in a max-plus linear problem. By using the power algorithm, it is determined eigen values and eigen vectors over max-plus algebra which will be used as production time periodization. The results obtained that the periodic time for the eyelash production system at PT Bio Takara Purwokerto is 78.488 minutes. Based on this periodic time, we can then obtain the time each processing unit starts working to produce eyelashes.

Keywords: Eigen, max-plus, periodic, discrete event system

PENDAHULUAN

Para wanita menggemari bulu mata palsu yang menjadi trend saat ini dalam dunia kecantikan. Wanita yang memiliki bulu mata indah dapat meningkatkan kepercayaan dirinya. Terdapat berbagai jenis bulu mata palsu yang diminati oleh wanita untuk aksesoris kecantikan. Hal inilah yang menyebabkan tingkat persaingan antar perusahaan produksi bulu mata menjadi semakin tinggi. Persaingan ini akan menimbulkan pengaruh negatif

maupun positif. Setiap perusahaan harus mampu meningkatkan daya saingnya dalam waktu cepat agar kebutuhan konsumen dapat terpenuhi. Agar kebutuhan konsumen dapat terpenuhi dengan baik maka suatu perusahaan dalam melakukan proses produksi harus memiliki perencanaan yang baik. Salah satu tahapan perencanaan produksi adalah penjadwalan (Puadah, 2020).

Penjadwalan produksi memiliki peran penting dalam mengoptimalkan sumber daya. Penjadwalan produksi bertujuan untuk mendapatkan keefektifan kerja pada setiap mesin pemrosesan, sehingga penumpukkan pekerjaan tidak terjadi. Hal ini dapat meminimalisasi waktu mengganggu atau waktu menunggu proses produksi selanjutnya. Dengan adanya penjadwalan produksi yang baik, maka perjalanan proses produksi juga akan berjalan dengan baik sesuai dengan alokasi waktu yang digunakan.

Sistem produksi merupakan salah satu contoh kasus sistem kejadian diskrit. Sistem kejadian diskrit merupakan suatu sistem yang perilakunya ditentukan oleh kejadian dan kejadiannya berubah pada waktu diskrit (Cassandras & Lafortune, 2008). Hal ini berarti perubahan suatu kejadian dipengaruhi oleh kejadian sebelumnya. Model matematika yang diperoleh dari masalah sistem kejadian diskrit ini tidak mudah diselesaikan, karena merupakan masalah sistem persamaan nonlinier.

Sistem kejadian diskrit dapat dimodelkan dan dianalisis dalam aljabar max-plus (Komenda et al., 2018; Schutter & Boom, 2008). Suatu permasalahan nonlinier pada aljabar konvensional dapat dinyatakan dalam suatu permasalahan linier max-plus. Aljabar max-plus merupakan sistem matematika yang terbentuk dari himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkaliannya didefinisikan sebagai operasi maksimum dan penjumlahan biasa (Goto, 2014). Untuk selanjutnya, aljabar max-plus dinotasikan dengan \mathbb{R}_{\max} .

Aljabar max-plus berkaitan dengan beberapa masalah pada teori graf, kombinatorika, teori sistem, stokastik dan teori antrian. Aljabar max-plus dapat digunakan dalam masalah penjadwalan sistem produksi (Nasrulyati, 2017), masalah sistem antrian (Subiono, 2009), masalah lalu lintas (Wibowo, dkk, 2018), dan masalah distribusi (Putri, 2016). Pemodelan dan analisis perilaku sistem dalam aljabar max-plus menggunakan model waktu invarian max-plus.

Permasalahan penjadwalan pada model aljabar max-plus berkaitan erat dengan masalah nilai eigen atas aljabar max-plus. Nilai eigen atas aljabar max-plus dapat dimanfaatkan dalam penentuan periodisasi penjadwalan

proses produksi. Beberapa penelitian terdahulu yang berkaitan dengan kajian teori nilai eigen atas aljabar max-plus dibahas pada Tunisa, dkk (2016) dan Musthofa & Binatari (2013). Selanjutnya, beberapa penelitian terdahulu yang berkaitan dengan penggunaan nilai eigen aljabar max-plus antara lain pada produksi shuttlecock T3 (Permana et al., 2020), produksi gelas (Pramesthi, 2017) dan penjadwalan laboratorium (Hasanah & Putrawangsa, 2015).

Beberapa penelitian terdahulu yang berkaitan dengan produksi bulu mata sudah dilakukan. Pada penelitian Amaliyah, dkk (2021), dibahas mengenai teknik efisiensi produksi bulu mata. Selain itu, pada penelitian Mayola, dkk (2021) dijelaskan tentang strategi pemasaran produksi bulu mata dan pada penelitian Nugroho (2021) dibahas tentang rancangan sistem keselamatan kerja pada produksi bulu mata. Selanjutnya, beberapa penelitian lain berkaitan dengan industri bulu mata, antara lain profil industri bulu mata di Kabupaten Purbalingga (Stacia & Gunanto, 2014), kompensasi dan motivasi karyawan industri bulu mata di Purbalingga (Purwati & Fitriana, 2023) dan kebijakan ramah perempuan dan anak di industri bulu mata Kabupaten Purbalingga (Darwin & Widaningrum, 2018).

Penelitian ini fokus tentang penjadwalan periodisasi produksi bulu mata dengan pendekatan matematika menggunakan pemodelan aljabar max-plus. Penelitian ini memanfaatkan konsep nilai eigen aljabar max-plus untuk menentukan penjadwalan produksi bulu mata. Hal ini dilakukan untuk menentukan periodisasi dan waktu proses produksi bulu mata dengan pemodelan max-plus. Periodisasi dan waktu proses produksi ini memiliki peran penting dalam pengoptimalan sumber daya untuk mendapatkan hasil produksi bulu mata yang optimum. Dengan penjadwalan produksi yang baik, maka proses produksi juga berjalan dengan baik, sehingga siap dipasarkan sesuai dengan waktu yang telah direncanakan.

METODE PENELITIAN

Peneliti mengambil studi kasus produksi bulu mata di PT Bio Takara Purwokerto. Peneliti melakukan observasi langsung ke PT Bio Takara Purwokerto untuk memperoleh data penelitian yang dibutuhkan. Peneliti melakukan wawancara kepada pegawai PT Bio Takara Purwokerto untuk memperoleh data waktu yang diperlukan untuk proses *knotting*, pengobatan, penggosokan, pemotongan, penggulungan, pengikatan, pengovenan, pembukaan oven, pemotongan bentuk, pengguntingan, pemasangan dan pembungkusan.

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian adalah:

1. melakukan studi pustaka yang berkaitan dengan masalah nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian pada matriks atas aljabar max-plus;
2. melakukan pengambilan data dengan wawancara kepada pegawai PT Bio Takara Purwokerto;
3. menyusun diagram alir proses produksi pabrik bulu mata;
4. membentuk model max-plus dari sistem produksi bulu mata;
5. membangun matriks yang diperoleh dari model sistem produksi bulu mata;
6. menyelesaikan masalah eigen pada sistem produksi bulu mata; dan
7. menentukan periodisasi proses produksi bulu mata.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa nilai eigen atas aljabar max-plus sudah digunakan pada produksi shuttlecock T3 (Permana et al., 2020), produksi gelas (Pramesthi, 2017) dan penjadwalan laboratorium (Hasanah & Putrawangsa, 2015). Pada penelitian ini, pembahasan digunakan pada produksi bulu mata yang meliputi nilai eigen serta vektor eigen yang bersesuaian atas aljabar max-plus, pembentukan model max-plus dari sistem produksi bulu mata, masalah eigen pada sistem produksi bulu mata dan periodisasi waktu proses produksi bulu mata.

Pada awal pembahasan ini, terlebih dahulu diberikan definisi dari nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus. Diberikan matriks A berukuran $n \times n$. Suatu nilai $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ dikatakan nilai eigen dari A apabila

$$A \otimes x = \lambda \otimes x$$

untuk suatu vektor $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ dengan $x \neq \mathcal{E}_{n \times 1}$. Selanjutnya, vektor x dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ pada matriks A . Penentuan nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus, tidak dapat dilakukan seperti halnya pada matriks atas himpunan riil yang dilakukan dengan menggunakan persamaan karakteristik. Semua elemen pada \mathbb{R}_{\max} kecuali elemen nol, tidak memiliki invers penjumlahan. Permasalahan invers penjumlahan ini yang menyebabkan perbedaan cara penghitungan nilai eigen pada matriks pada aljabar max-plus dan matriks pada aljabar linier.

Untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks atas aljabar max-plus dapat dilakukan dengan menggunakan algoritma power. Selain itu, penentuan nilai eigen juga dapat dilakukan dengan metode rata-rata sikel maksimum. Langkah-langkah penentuan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks A berukuran $n \times n$ menggunakan algoritma power adalah:

- mulai dengan sembarang vektor awal $x(0) \neq \mathcal{E}$;
- melakukan iterasi pada persamaan $x(k+1) = A \otimes x(k)$, dengan $k = 0, 1, 2, \dots$ sampai ada bilangan bulat p, q , dengan $p > q \geq 0$ dan bilangan riil c sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yakni $x(p) = c \otimes x(q)$;
- menentukan nilai eigen λ dengan rumus $\lambda = \frac{c}{p-q}$; dan
- menentukan vektor eigen v dengan rumus

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1) \right).$$

Langkah-langkah untuk mengitung nilai eigen dan vektor eigen pada matriks A berukuran $n \times n$ dengan metode rata-rata sikel maksimum adalah:

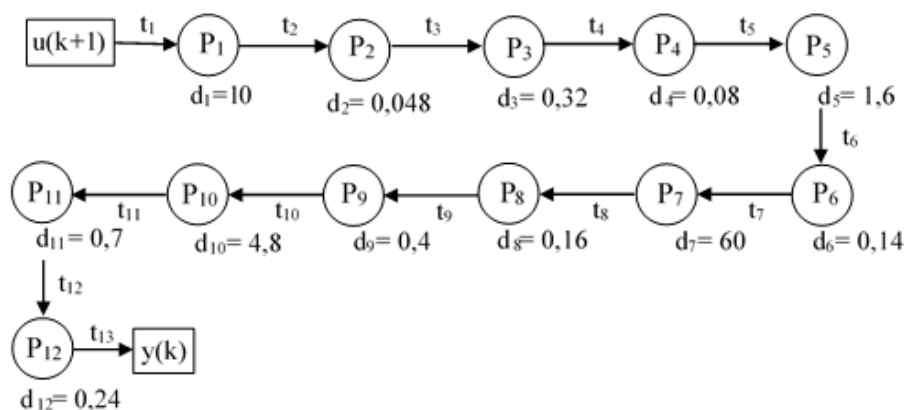
- menghitung matriks $A^{\otimes k}$, dengan $k = 1, 2, \dots, n$;
- menghitung $\lambda = \bigoplus_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \text{trace}(A^{\otimes k}) \right)$, dengan λ merupakan nilai eigen dari matriks A ;
- memilih sirkuit kritis pada $G(A)$ yakni sirkuit (c, c) untuk $1 \leq c \leq n$;
- menghitung matriks $B = -\lambda \otimes A$ dan B^* , dengan $B^* = E_n \oplus B \oplus B^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus B^{\otimes n-1}$; dan
- menentukan vektor eigen dari A yakni kolom ke- c dari maktriaks B^* .

Penghitungan nilai eigen pada penelitian ini dilakukan dengan algoritma power. Selanjutnya, nilai eigen tersebut akan digunakan untuk menentukan periodisasi penjadwalan proses produksi bulu mata di PT Bio Takara Purwokerto.

Hasil studi lapangan yang dilakukan di PT Bio Takara Purwokerto diperoleh data alur proses produksi bulu mata dan waktu kerja masing-masing unit pemrosesan. Bahan baku yang digunakan untuk membuat bulu mata yaitu rambut dan benang. Proses produksi bulu mata terdiri dari 12 unit pemrosesan. Setiap unit pemrosesan dinotasikan dengan P_i , dengan $i = 1, 2, \dots, 12$, waktu kerja (dalam satuan menit) yang dibutuhkan setiap unit pemrosesan dinotasikan dengan d_i , dengan $i = 1, 2, \dots, 12$, dan waktu perpindahan dari suatu unit pemrosesan ke unit pemrosesan yang lain dinotasikan dengan t_i , dengan $i = 1, 2, \dots, 12$. Pada proses produksi bulu mata ini tidak terdapat waktu perpindahan dari suatu unit pemrosesan ke unit pemrosesan yang lain dengan kata lain $t_1 = t_2 = \dots = t_{12} = 0$. Data hasil studi lapangan pada PT Bio Takara Purwokerto ditunjukkan pada Tabel 1. Selanjutnya, data tersebut direpresentasikan dalam bentuk diagram alir ditunjukkan pada Gambar 1.

Tabel 1. Deskripsi Alur Proses Produksi Bulu Mata dan Waktu Kerja Unit Pemrosesan

Proses P_i	Keterangan	Waktu d_i (menit)
P_1	Proses <i>Knotting</i>	10
P_2	Proses Obat	0,048
P_3	Proses Gosok	0,32
P_4	Proses Potong	0,08
P_5	Proses Gulung	1,6
P_6	Proses Ikat	0,14
P_7	Proses Oven	60
P_8	Proses Buka Oven	0,16
P_9	Proses Potong Bentuk	0,4
P_{10}	Proses Gunting	4,8
P_{11}	Proses Pasang	0,7
P_{12}	Proses Pembungkusan	0,24



Gambar 1. Diagram Alir Proses Produksi Bulu Mata

Sebelum membentuk model max-plus diberikan asumsi-asumsi dalam sistem produksi bulu mata, yakni:

- Terdapat tempat penyimpanan diantara input dan unit pemrosesan dengan kapasitas yang cukup besar;
- ada kondisi awal semua unit pemrosesan dan tempat penyimpanan kosong;
- Setiap unit pemrosesan dapat mulai bekerja untuk proses selanjutnya apabila telah menyelesaikan proses sebelumnya;
- Setiap unit pemrosesan akan mulai bekerja apabila semua komponen tersedia; dan
- Ketika rambut dan benang dimasukkan ke sistem dimana pada saat ini bersamaan dengan proses produksi bulu mata selesai dan meninggalkan sistem atau dapat ditulis dengan $u(k + 1) = y(k)$.

Selanjutnya, didefinisikan waktu yang berkaitan dengan produksi bulu mata untuk membentuk model max-plus sistem produksi bulu mata, yakni:

- $u(k + 1)$ adalah waktu dimana rambut dan benang dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke- $(k + 1)$;
- $x_i(k)$ adalah waktu pada saat unit pemrosesan ke- i mulai bekerja untuk proses ke- k , dengan $i = 1, 2, \dots, 12$; dan
- $y(k)$ adalah waktu dimana proses produksi bulu mata selesai dan meninggalkan sistem pada saat yang ke- k .

Berdasarkan asumsi dan definisi yang sudah diberikan, selanjutnya menentukan waktu setiap unit pemrosesan P_1, P_2, \dots, P_{12} mulai bekerja untuk proses ke- $(k + 1)$. Berikut akan dijelaskan penentuan waktu unit pemrosesan P_1 mulai bekerja untuk proses ke- $(k + 1)$. Unit pemrosesan P_1 mulai bekerja untuk proses ke- $(k + 1)$ apabila bahan baku sudah tersedia dan telah menyelesaikan proses ke- k . Rambut dan benang akan tersedia sebagai input pada unit pemrosesan P_1 untuk proses ke- $(k + 1)$ yaitu apabila rambut dan benang sudah masuk ke dalam sistem pada waktu $t = u(k + 1) + 0$. Selanjutnya, unit pemrosesan P_1 dapat mulai bekerja untuk memroses rambut dan benang tersebut apabila telah menyelesaikan proses sebelumnya, yakni proses ke- k . Proses ke- k pada unit pemrosesan P_1 akan selesai dan produk meninggalkan P_1 pada waktu $t = x_1(k) + 10$. Hal ini dikarenakan waktu pemrosesan yang dibutuhkan pada unit pemrosesan P_1 adalah $d_1 = 10$. Dengan demikian, diperoleh waktu unit pemrosesan P_1 mulai bekerja untuk proses ke- $(k + 1)$ adalah

$$x_1(k + 1) = \max\{x_1(k) + 10, u(k + 1)\}.$$

Begitu seterusnya hingga proses produksi bulu mata selesai.

Oleh karena itu, berdasarkan gambar diagram alir maka dapat diperoleh waktu setiap unit pemrosesan mulai bekerja untuk proses ke- $(k + 1)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(k + 1) &= \max\{x_1(k) + d_1, u(k + 1) + t_1\} \\ x_2(k + 1) &= \max\{x_1(k + 1) + d_1 + t_2, x_3(k) + d_3\} \\ x_3(k + 1) &= \max\{x_2(k + 1) + d_2 + t_3, x_3(k) + d_3\} \\ x_4(k + 1) &= \max\{x_3(k + 1) + d_3 + t_4, x_4(k) + d_4\} \\ x_5(k + 1) &= \max\{x_4(k + 1) + d_4 + t_5, x_5(k) + d_5\} \\ x_6(k + 1) &= \max\{x_5(k + 1) + d_5 + t_6, x_6(k) + d_6\} \\ x_7(k + 1) &= \max\{x_6(k + 1) + d_6 + t_7, x_7(k) + d_7\} \\ x_8(k + 1) &= \max\{x_7(k + 1) + d_7 + t_8, x_8(k) + d_8\} \\ x_9(k + 1) &= \max\{x_8(k + 1) + d_8 + t_9, x_9(k) + d_9\} \\ x_{10}(k + 1) &= \max\{x_9(k + 1) + d_9 + t_{10}, x_{10}(k) + d_{10}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{11}(k+1) &= \max\{x_{10}(k+1) + d_{10} + t_{11}, x_{11}(k) + d_{11}\} \\x_{12}(k+1) &= \max\{x_{11}(k+1) + d_{11} + t_{12}, x_{12}(k) + d_{12}\}.\end{aligned}$$

Jika persamaan-persamaan tersebut disajikan dalam bentuk persamaan max-plus, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) \otimes d_1 \oplus u(k+1) \otimes t_1 \\x_2(k+1) &= x_1(k+1) \otimes d_1 \otimes t_2 \oplus x_3(k) \otimes d_3 \\x_3(k+1) &= x_2(k+1) \otimes d_2 \otimes t_3 \oplus x_3(k) \otimes d_3 \\x_4(k+1) &= x_3(k+1) \otimes d_3 \otimes t_4 \oplus x_4(k) \otimes d_4 \\x_5(k+1) &= x_4(k+1) \otimes d_4 \otimes t_5 \oplus x_5(k) \otimes d_5 \\x_6(k+1) &= x_5(k+1) \otimes d_5 \otimes t_6 \oplus x_6(k) \otimes d_6 \\x_7(k+1) &= x_6(k+1) \otimes d_6 \otimes t_7 \oplus x_7(k) \otimes d_7 \\x_8(k+1) &= x_7(k+1) \otimes d_7 \otimes t_8 \oplus x_8(k) \otimes d_8 \\x_9(k+1) &= x_8(k+1) \otimes d_8 \otimes t_9 \oplus x_9(k) \otimes d_9 \\x_{10}(k+1) &= x_9(k+1) \otimes d_9 \otimes t_{10} \oplus x_{10}(k) \otimes d_{10} \\x_{11}(k+1) &= x_{10}(k+1) \otimes d_{10} \otimes t_{11} \oplus x_{11}(k) \otimes d_{11} \\x_{12}(k+1) &= x_{11}(k+1) \otimes d_{11} \otimes t_{12} \oplus x_{12}(k) \otimes d_{12} \\y(k) &= 0,24 \otimes x_{12}(k).\end{aligned}$$

Persamaan-persamaan tersebut yang semula merupakan persamaan non-linier, setelah disajikan dalam max-plus dapat disajikan menjadi persamaan-persamaan linier. Dengan melakukan proses rekursi dan mensubstitusikan nilai d_i serta t_i , model max-plus sistem produksi bulu mata dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks berikut ini :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) \\y(k) &= C \otimes x(k)\end{aligned}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

untuk

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20 & 0,048 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20,048 & 0,096 & 0,32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20,368 & 0,416 & 0,64 & 0,08 & \varepsilon & \varepsilon \\ 20,448 & 0,496 & 0,72 & 0,16 & 1,6 & \varepsilon \\ 22,048 & 2,096 & 2,32 & 1,76 & 3,2 & 0,14 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 22,188 & 2,236 & 2,46 & 1,9 & 3,34 & 0,28 \\ 82,188 & 62,236 & 62,46 & 61,9 & 63,34 & 60,28 \\ 82,348 & 62,396 & 62,62 & 62,06 & 63,5 & 60,44 \\ 82,748 & 62,796 & 63,02 & 62,46 & 63,9 & 60,84 \\ 87,548 & 67,596 & 67,82 & 67,26 & 68,7 & 65,64 \\ 88,248 & 68,296 & 68,52 & 67,96 & 69,4 & 66,34 \end{bmatrix}$$

dan

$$A_4 = \begin{bmatrix} 60 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 120 & 0,16 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 120,16 & 0,32 & 0,4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 120,56 & 0,72 & 0,8 & 4,8 & \varepsilon & \varepsilon \\ 125,36 & 5,52 & 5,6 & 9,6 & 0,7 & \varepsilon \\ 126,06 & 6,22 & 6,3 & 10,3 & 1,4 & 0,2 \end{bmatrix},$$

$$\text{serta } x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \\ x_9(k) \\ x_{10}(k) \\ x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 10,048 \\ 10,368 \\ 10,448 \\ 12,048 \\ 12,188 \\ 72,188 \\ 72,348 \\ 72,748 \\ 77,548 \\ 78,248 \end{bmatrix} \text{ dan } C^T = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0,24 \end{bmatrix}.$$

Diperhatikan bahwa $A \in \mathbb{R}_{\max}^{12 \times 12}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{12}$, $C^T \in \mathbb{R}_{\max}^{12}$, $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{12}$ dan $u(k) \in \mathbb{R}_{\max}$.

Selanjutnya, berdasarkan asumsi $u(k) = y(k)$ maka persamaan model max-plus dapat dinyatakan sebagai

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) = (A \oplus B \otimes C) \otimes x(k).$$

Apabila dimisalkan $\bar{A} = A \oplus B \otimes C$, maka diperoleh persamaan

$$x(k+1) = \bar{A} \otimes x(k).$$

Persamaan ini yang memunculkan masalah nilai eigen pada sistem produksi bulu mata pada penelitian ini. Hasil proses iterasi yang dilakukan pada persamaan $x(k+1) = \bar{A} \otimes x(k)$ dengan $k = 1, 2, 3, \dots$ yakni

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x(1) = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20,048 \\ 20,368 \\ 20,448 \\ 22,048 \\ 60 \\ 120 \\ 120,16 \\ 120,56 \\ 125,36 \\ 126,06 \end{bmatrix}, x(2) = \begin{bmatrix} 126,3 \\ 136,3 \\ 136,348 \\ 136,668 \\ 136,748 \\ 138,348 \\ 138,488 \\ 198,488 \\ 198,648 \\ 199,048 \\ 203,848 \\ 204,548 \end{bmatrix}, x(3) = \begin{bmatrix} 204,788 \\ 214,788 \\ 214,836 \\ 215,156 \\ 215,236 \\ 216,836 \\ 216,976 \\ 276,976 \\ 277,136 \\ 277,536 \\ 282,336 \\ 283,036 \end{bmatrix}, \dots$$

Diperoleh perilaku periodiknya adalah $x(3) = 78,488 \otimes x(2)$. Dengan demikian nilai eigen matriks \bar{A} yakni $\lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{78,488}{3-2} = \frac{78,488}{1} = 78,488$. Selanjutnya, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 78,488$ adalah vektor

$$v = \begin{bmatrix} 126,3 \\ 136,3 \\ 136,348 \\ 136,668 \\ 136,748 \\ 138,348 \\ 138,488 \\ 198,488 \\ 198,648 \\ 199,048 \\ 203,848 \\ 204,548 \end{bmatrix}$$

Setelah itu, untuk menentukan waktu awal sistem mulai bekerja adalah dengan cara mencari elemen vektor eigen non negatif minimum. Elemen vektor eigen non negatif minimum dapat diperoleh dengan mengubah elemen vektor eigen terkecil menjadi nol. Nilai terkecil vektor eigen adalah 126,3 dengan kata lain $\alpha = -126,3$. Dengan demikian, diperoleh vektor eigen v' sebagai berikut

$$v' = -126,3 \otimes \begin{bmatrix} 126,3 \\ 136,3 \\ 136,348 \\ 136,668 \\ 136,748 \\ 138,348 \\ 138,488 \\ 198,488 \\ 198,648 \\ 199,048 \\ 203,848 \\ 204,548 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 10,048 \\ 10,368 \\ 10,448 \\ 12,048 \\ 12,188 \\ 72,188 \\ 72,348 \\ 72,748 \\ 77,548 \\ 78,248 \end{bmatrix}$$

Dari hasil vektor eigen v' , maka diperoleh waktu setiap unit pemrosesan P_1, P_2, \dots, P_{12} di mulai bekerja secara periodik dengan periode 78,488 menit, seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Jadwal Proses Produksi Bulu Mata Mulai Bekerja

Tahapan Pemrosesan	Produksi ke – (dalam satuan menit)		
	1	2	3
P_1	0	78,488	156,976
P_2	10	88,488	166,976
P_3	10,048	88,536	167,024
P_4	10,368	88,856	167,344
P_5	10,448	88,936	167,424
P_6	12,048	90,536	169,024
P_7	12,188	90,676	169,164
P_8	72,188	150,676	229,164
P_9	72,348	150,836	229,324
P_{10}	72,748	151,236	229,724
P_{11}	77,548	156,036	234,524
P_{12}	78,248	156,736	235,224

Berdasarkan Tabel 2, waktu setiap unit pemrosesan P_1, P_2, \dots, P_{12} mulai bekerja untuk proses ke-1 masing-masing yakni pada menit ke 0,10, 10,048, ... , 78,248. Selanjutnya, unit pemrosesan P_1, P_2, \dots, P_{12} dapat mulai bekerja untuk proses ke-2,3, secara periodik dengan periode 78,488 menit. Misalkan produksi bulu mata di PT Bio Takara Purwokerto dimulai dari jam 08.00, maka diperoleh jadwal produksi secara periodik seperti pada Tabel 3.

Tabel 3. Jadwal Produksi Bulu Mata

Tahapan Pemrosesan	Waktu Mulai Bekerja (WIB)		
	Produksi ke- 1	Produksi ke- 2	Produksi ke- 3
P ₁	08.00	09.18.29	10.36.58
P ₂	08.10	09.28.29	10.46.58
P ₃	08.10.03	09.28.32	10.47.01
P ₄	08.10.22	09.28.51	10.47.20
P ₅	08.10.27	09.28.56	10.47.25
P ₆	08.12.03	09.30.32	10.49.01
P ₇	08.12.11	09.30.40	10.49.09
P ₈	09.12.11	10.30.40	11.49.09
P ₉	09.12.21	10.30.50	11.49.19
P ₁₀	09.12.45	10.31.14	11.49.43
P ₁₁	09.17.33	10.36.02	11.54.31
P ₁₂	09.18.15	10.36.44	11.55.13

Pada penelitian sebelumnya tentang teknikal efisiensi produksi bulu mata (Amaliyah et al., 2021), tidak dibahas mengenai jadwal produksi. Pada penelitian (Mayola et al., 2021) hanya dijelaskan tentang strategi pemasaran produksi bulu mata secara umum. Pada artikel ini, pembahasan dilakukan sampai diperoleh periodisasi rencana jadwal produksi bulu mata seperti pada Tabel 3. Dengan selesainya proses produksi bulu mata pada setiap periodisasi, berarti bulu mata siap dipasarkan sesuai dengan jadwal selesainya periodisasi produksi.

SIMPULAN DAN SARAN

Model max-plus sistem produksi bulu mata di PT Bio Takara Purwokerto dapat ditulis dalam bentuk persamaan max-plus

$$x(k + 1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k)$$

$$y(k) = C \otimes x(k)$$

dengan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{12 \times 12}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{12}$, $C^T \in \mathbb{R}_{\max}^{12}$, $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{12}$ dan $u(k) \in \mathbb{R}_{\max}$. Apabila dimisalkan $\bar{A} = A \oplus B \otimes C$, maka diperoleh persamaan

$$x(k + 1) = \bar{A} \otimes x(k)$$

yang memunculkan masalah nilai eigen atas aljabar max-plus. Nilai eigen yang diperoleh yakni $\lambda = 78,488$, yang tak lain merupakan waktu periodik proses produksi bulu mata. Dengan demikian, produksi bulu mata dapat dilakukan secara periodik dalam waktu 78,488 menit. Selanjutnya, waktu unit pemrosesan P_1, P_2, \dots, P_{12} mulai bekerja untuk memproduksi bulu mata yakni berturut-turut adalah menit ke 0,10, 10,048, ... , 78,248.

Pada penelitian ini, data dari observasi lapangan diperoleh bahwa tidak terdapat waktu perpindahan dari suatu unit pemrosesan ke unit pemrosesan yang lain, yakni $t_1 = t_2 = \dots = t_{12} = 0$. Untuk penelitian selanjutnya, direkomendasikan terdapat waktu perpindahan dari suatu unit pemrosesan ke unit pemrosesan yang lain, yakni $t_1 = 0$ atau $t_2 = 0 \dots$ atau $t_{12} = 0$. dan saran ditulis dalam bentuk paragraf. Kesimpulan yang disampaikan merupakan kebaruan dari temuan penelitian yang dikuatkan oleh hasil penelitian.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh LPPM Universitas Jenderal Soedirman melalui hibah Riset Peningkatan Kompetensi Tahun 2022, dengan perjanjian kontrak nomor: T/861/UN23.18/PT.01.03/2022.

DAFTAR RUJUKAN

- Amaliyah, D. N., Sasana, H., & Prakoso, J. A. (2021). Teknikal Efisiensi Produksi Bulu Mata dan Rambut Palsu di Kabupaten Purbalingga: Stochastic Frontier Analysis. *DINAMIC : Directory Journal of Economic*, 3(3), 741–753.
- Cassandras, C. G., & Lafortune, S. (Eds.). (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-68612-7>
- Darwin, M., & Widaningrum, A. (2018). Kebijakan Ramah Perempuan dan Anak dalam Merespons Antagonisme Industri Rambut dan Bulu Mata Palsu di Kabupaten Purbalingga. *Palastren*, 11(1), 25–50.
- Goto, H. (2014). Introduction to max-plus algebra. *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation - ISSAC '14*, 21–22. <https://doi.org/10.1145/2608628.2627496>
- Hasanah, U., & Putrawangsa, S. (2015). Penggunaan Aljabar Max-Plus dalam Pembentukan Model Matematis pada Sistem Penjadwalan Praktikum Laboratorium. *Beta*, 8(1), 66–78.
- Komenda, J., Lahaye, S., Boimond, J.-L., & van den Boom, T. (2018). Max-Plus Algebra in the History of Discrete Event Systems. *Annual Reviews in Control*, 45, 240–249. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2018.04.004>
- Mayola, C. A., Megasari, D. S., Dwiyantri, S., & Lutfiati, D. (2021). Strategi Pemasaran Marketing Mix Produk Bulu Mata Palsu Ellashes.Pro. *e-Jurnal*, 10(3), 83–95.
- Musthofa, M., & Binatari, N. (2013). Sifat-Sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus. *Jurnal Sains Dasar*, 2(1), 25–31.

- Nasrulyati, T. S. (2017). Aljabar Max-Plus dan Aplikasinya: Model Sistem Produksi Sederhana. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, 17(1), 1–6.
- Nugroho, A. J. (2021). Rancangan Sistem Manajemen Keselamatan dan Kesehatan Kerja Berdasarkan Metode Swift (Studi Kasus: Perusahaan Bulu Mata). *Jurnal DISPROTEK*, 12(1), 25–33.
- Permana, A., Siswanto, S., & Pangadi, P. (2020). Eigen Problem Over Max-Plus Algebra on Determination of the T3 Brand Shuttlecock Production Schedule. *Numerical: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 4(1), 23–30. <https://doi.org/10.25217/numerical.v4i1.702>
- Pramesthi, S. R. P. W. (2017). Terapan Aljabar Max-Plus pada Sistem Proses Produksi Gelas. *Jurnal Widyaloka*, 4(2), 223–239.
- Puadah, E. S. (2020). Perencanaan Penjadwalan Produksi Tahu Bulat dengan Menggunakan Metode Material Requirement Planning (MRP) pada IKM Windo Jaya di Tasikmalaya. *Jurnal Mahasiswa Industri Galuh*, 1(1), 69–75.
- Purwati, E., & Fitriana, A. (2023). *Pengaruh Kompensasi dan Motivasi Terhadap Kinerja Karyawan Bagian Pasang Bulu Mata (Studi Kasus Perusahaan Bulu Mata PT Hyup Sung Indonesia di Purbalingga)*. 14(1).
- Putri, R. K. (2016). Penentuan Jalur Terpendek Menggunakan Aljabar Min-Plus. Studi Kasus: Distribusi Kentang Jalur Pangalengan, Bandung - Jakarta. *Wahana*, 66(1), 7–15. <https://doi.org/10.36456/wahana.v66i1.477>
- Schutter, B. D., & Boom, T. V. D. (2008). Max-plus Algebra and Max-Plus Linear Discrete Event Systems: An Introduction. *2008 9th International Workshop on Discrete Event Systems*, 36–42. <https://doi.org/10.1109/WODES.2008.4605919>
- Stacia, V., & Gunanto, E. Y. A. (2014). Profil Industri Bulu Mata dan Rambut Palsu di Kabupaten Purbalingga. *Diponegoro Journal of Economics*, 3(1), 1–10.
- Subiono, S. (2009). Aljabar Maxplus dan Aplikasinya: Model Sistem Antrian. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 6(1), 49–59. <https://doi.org/10.12962/j1829605X.v6i1.1431>
- Tunisa, K., Wijayanti, K., & Veronica, R. B. (2016). Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus. *UNNES Journal of Mathematics*, 6(2), 189–197.
- Wibowo, A., Wijayanti, K., & Veronica, R. B. (2018). Penerapan Aljabar Max-Plus pada Pengaturan Sistem Antrian Traffic Light. *UNNES Journal of Mathematics*, 7(2), 192–205.